Chapitre 1 : Ensembles et applications

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1.1. Un ensemble est une collection d'objets mathématiques.
Étant donné un objet x et un ensemble E, soit x appartient à E (ou est élément de E) et on note $x \in E$, soit x n'appartient pas à E et on note $x \notin E$

1.2 Modes de définition d'un ensemble

1.2.1 "In extenso"

On peut définir un ensemble en listant ses éléments :

$$\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3, ...\}, \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...\}$$

1.2.2 "En compréhension"

Étant donné un ensemble X et une assertion $P(x)$ qui dépend de $x \in X$, on peut considérer

$$\{x \in X \mid P(x)\}$$

l'ensemble de $x \in X$ tels que $P(x)$ soit vraie.

1.2.3 "Par paramétrage"

On peut définit l'ensemble

$$\{f(x) \mid x \in X\}$$

des $f(x)$ quand x décrit X

1.3 Inclusion

Définition 1.2. Soit X et Y deux ensembles.
On dit que X est inclus dans Y (ou que c'est une partie de Y) si $\forall n \in X, x \in Y$
Dans ce cas, on note $X \subseteq Y$

Canevas :

Montrons $X \subseteq Y$
Soit $x \in X$
[...] donc $x \in Y$

Montrons $X = Y$ par double inclusion.
Sens direct : soit $x \in X$
[...] donc $x \in Y$
Sens réciproque : soit $y \in T$
[...] donc $y \in X$

Définition 1.3. Soit X un ensemble.
On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X

2 Opérations sur les ensembles

2.1 Opérations booléennes

Définition 2.1. Soit Ω un ensemble et $A, B \subseteq \Omega$
On définit :
* L'union : $A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
* L'intersection : $A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$
* La différence (ensembliste) "A privé de B" : $A \setminus B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}$

Définition 2.2. Soit A, B deux ensembles.
On dit que A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$

Proposition 2.3. Soit A, B, C trois parties d'ensemble Ω
* Lois de De Morgan :
$$\Omega \setminus (A \cup B) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$$
$$\Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$$
* Double distributivité :
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

2.2 Familles d'ensembles

Définition 2.4. Soit E et I deux ensembles.
Une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de E indexée par I est la donnée, pour tout $i \in I$ d'un élément $a_i \in E$

Définition 2.5. Soit Ω et I deux ensembles de $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de Ω indexée par I
On définit
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega \mid \exists i \in I : x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$$

Proposition 2.6. Soit Ω et I deux ensembles, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de Ω indexée par I et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$
* Lois de De Morgan :
$$\Omega \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\Omega \setminus A_i)$$
$$\Omega \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (\Omega \setminus A_i)$$
* Double distributivité :
$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$$
$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$$

Définition 2.7. Soit Ω et I deux ensembles et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de Ω
On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement disjoint de Ω si :
* $(A_i)_{i \in I}$ recouvre Ω : $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \Omega$
* $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles (deux à deux) disjoints : $\forall i, j \in I, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$

2.3 Produit cartésien

Définition 2.8. Soit A et B deux ensembles.
On note
$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$
l'ensemble des couples dont la première coordonnée est élément de A et la deuxième de B

3 Applications

3.1 Définition

Définition 3.1. Soit E et F deux ensembles.
Une application $f : E \to F$ est la donnée, pour tout $x \in E$ d'un élément $f(x) \in F$
On dit que E est le domaine (ou l'ensemble de départ) de f et F est son codomaine (ou l'ensemble d'arrivée).
L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E

3.2 Graphe d'une application

Définition 3.2. Soit $f : E \to F$
On définit son graphe :
$$\mathrm{gr}(f) = \{(x,y) \in E \times F \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$$

3.3 Composition

Définition 3.3. Soit $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux applications telles que $F \subseteq G$
On définit leur composée
$$g \circ f : \begin{cases} E \to H \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Proposition 3.4.

* Soit $f : E \to F$ une application.
  Alors $id_F \circ f = f \circ id_E = f$
* Soit $f_1 : E_1 \to F_1, f_2 : E_2 \to F_2$ et $f_3 : E_3 \to F_3$ telles que $F_1 \subseteq F_2$ et $F_2 \subseteq F_3$
  Alors $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$
  On dit que la composition est associative.

3.4 Restriction, induction

Définition 3.5. Soit $f : E \to F$ et $A \subseteq E$
On définit la restriction
$$f_{|A} : \begin{cases} A \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

Définition 3.6. Soit $f : E \to F$, $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$
On dit que f induit une application de A vers B si $\forall x \in A, f(x) \in B$
On note alors
$$f_{|A}^{|B} : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$
l'application induite.

Définition 3.7. Soit $f : E \to E$ et $A \subseteq E$
On dit que A est stable sous f si $\forall x \in A, f(x) \in A$

3.5 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 3.8. Soit $f : E \to F$
On dit que :

* f est injective (one to one) si $\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
* f est surjective (onto) si $\forall y \in F, \exists x \in E : f(x) = y$
* f est bijective si elle est injective et surjective.

Définition 3.9. Soit $f : E \to F$ et $y \in F$
On appelle antécédent de y par f (ou f-antécédent de y) tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$

Proposition 3.10. Soit $f : E \to F$

* f est injective ssi tout élément de F a au plus un antécédent.
* f est surjective ssi tout élément de F a au moins un antécédent.
* f est bijective ssi tout élément de F a exactement un antécédent.

Proposition 3.11.

* La composée de deux injections $f : E \to F$ et $g : G \to H$ (où $F \subseteq G$) est injective.
* La composée de deux surjections $f : E \to F$ et $g : F \to H$ est surjective.
* La composée de deux bijections $f : E \to F$ et $g : F \to H$ est bijective.

Attention : Pour les deux derniers points, il est capital que le codomaine de f soit le domaine de g

Proposition 3.12. Soit $f : E \to F$ et $g : G \to H$, où $F \subseteq G$

* Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
* Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

3.6 Bijectivité et réciproque

Théorème 3.13. Soit $f : E \to F$
Alors f est bijective si et seulement si elle admet une réciproque, càd une application $g : F \to E$ telle que

$$\begin{cases} g \circ f = id_E \\ f \circ g = id_F \end{cases}$$

Si c'est la cas, la réciproque est unique : on la note f^{-1}

Attention : Ne pas utiliser la notation f^{-1} avant de savoir que f est bien bijective !

Proposition 3.14 (Chaussettes et chaussures)**.** Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections.
Alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

3.7 Images directe et réciproque

Définition 3.15. Soit $f : E \to F$

* Pour toute partie $A \subseteq E$, on définit l'image directe

$$f(A) = f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$$

* Pour toute partie $B \subseteq F$, on définit l'image réciproque

$$f^{-1}(B) = f^{-1}[B] = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Proposition 3.16. Soit $f : E \to F$

* Alors f induit une application surjective $f_{|E}^{|f[E]} : E \to f[E]$
* Si f est injective, l'application induite $f_{|E}^{|f[E]}$ est bijective.

Proposition 3.17 (Propriétés de l'image directe)**.** Soit $f : E \to F$

* Soit $A, A' \subseteq E$
  Si $A \subseteq A'$, alors $f[A] \subseteq f[A']$
* Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E
  Alors
$$f\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$$

Proposition 3.18 (Propriétés de l'image réciproque)**.** Soit $f : E \to F$

* Soit $B, B' \subseteq F$ tels que $B \subseteq B'$
  Alors $f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[B']$
* Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de F
  Alors
$$f^{-1}\left[\bigcup_{i \in I} B_i\right] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i] \quad \text{et} \quad f^{-1}\left[\bigcap_{i \in I} B_i\right] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i]$$
* Si $B \subseteq F$, on a $f^{-1}[F \setminus B] = E \setminus f^{-1}[B]$

3.8 Fonctions indicatrices

Définition 3.19. Soit Ω un ensemble et $A \subseteq \Omega$
On définit la fonction indicatrice de A (ou fonction caractéristique)

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} \Omega \to \{0, 1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{cases}$$

4 Ensembles finis

Définition 4.1. On dit que deux ensembles E et F sont en bijection ou équipotents s'il existe une bijection entre E et F

4.1 Principe des tiroirs

Théorème 4.2 (Principe des tiroirs / Principe de Dinichlet / Pigeonhole principle)**.** Soit $n, m \in \mathbb{N}$
S'il existe une injection $[\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$, alors $n \leq m$

Corollaire 4.3. Soit $n, m \in \mathbb{N}$
Si $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, m]\!]$ sont équipotents, alors $n = m$

4.2 Définitions

Définition 4.4. Soit E un ensemble.

* On dit que E est fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que E et $[\![1, n]\!]$ soient équipotents.
* Quand c'est le cas, on dit que E a n éléments ou qu'il est de cardinal n et on note

$$n = |E| = \text{Card}(E) = \#E$$

Proposition 4.5. Soit E et F deux ensembles équipotents.
Si E est fini, alors F aussi et $|E| = |F|$

Définition 4.6. Soit E un ensemble.

* Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties finies de E de cardinal k
* On note $\mathcal{P}_f$ l'ensemble des parties finies de E

4.3 Parties d'un ensemble fini

Proposition 4.7. Soit E un ensemble fini et $F \subseteq E$
Alors F est fini et $|F| \leq |E|$

Lemme 4.8. Soit A_0, A_1, B_0, B_1 quatre ensembles tels que $A_0 \cap A_1 = B_0 \cap B_1 = \emptyset$ et deux bijections $f_0 : A_0 \to B_0$ et $f_1 : A_1 \to B_1$
Alors l'application

$$f : \begin{cases} A_0 \cup A_1 \to B_0 \cup B_1 \\ i \mapsto \begin{cases} f_0(i) \text{ si } i \in A_0 \\ f_1(i) \text{ si } i \in A_1 \end{cases} \end{cases}$$

est une bijection.

4.4 Opérations sur les ensembles et les cardinaux

4.4.1 Union

Proposition 4.9.

* Soit E et F deux ensembles disjoints finis.
  Alors $E \cup F$ est fini et $|E \cup F| = |E| + |F|$
* Soit $E_1, ..., E_r$ des ensembles finis disjoints (deux à deux).
  Alors $\bigcup\limits_{i=1}^{r} E_i$ est fini et $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{r} E_i\right| = |E_1| + ... + |E_r|$
* Soit E et F deux ensembles finis.
  Alors $(E \cup F)$ est fini et $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$

4.4.2 Différence

Proposition 4.10. Soit E et F deux ensembles tels que $F \subseteq E$ et E soit fini.

* On a $|E \setminus F| = |E| - |F|$
* Si $|E| = |F|$, on a $E = F$

4.4.3 Produit cartésien

Proposition 4.11. Soit E et F deux ensembles finis.
Alors $E \times F$ est fini et $|E \times F| = |E| \times |F|$

Corollaire 4.12.

* Si $E_1, ..., E_r$ sont des ensembles finis, $|E_1 \times ... \times E_r| = |E_1| \times ... \times |E_r|$
* Si E est un ensemble fini, $|E^r| = |E|^r$

4.4.4 Ensembles d'applications

Proposition 4.13. Soit E et F deux ensembles finis.
Alors F^E est fini, de cardinal $|F^E| = |F|^{|E|}$

4.4.5 Ensembles de parties

Proposition 4.14. Soit E un ensemble fini.
Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini de cardinal $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

Proposition 4.15. Soit $k \in \mathbb{N}$ et E un ensemble fini de cardinal n
Alors $\mathcal{P}_k(E)$ est fini et $|\mathcal{P}_k(E)| = |\mathcal{P}_k([\![1, n]\!])|$

Définition 4.16. Soit $k, n \in \mathbb{N}$
On appelle coefficient binomial le nombre $\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k([\![1, n]\!])|$

4.5 Applications entre ensembles finis

Théorème 4.17. Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$

* Si f est injective, alors $|E| \leq |F|$
* Si f est surjective, alors $|E| \geq |F|$
* Si $|E| = |F|$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
  (i) f est injective.
  (ii) f est surjective.
  (iii) f est bijective.

Lemme 4.18. Soit $f : E \to F$ une application entre ensembles finis.

* On a $|f[E]| \leq |E|$
* On a $|f[E]| = |E|$ si et seulement si f est injective.

Corollaire 4.19. Soit E un ensemble fini et $f : E \to E$
Alors f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective.

4.6 Parties finies de $\mathbb{R}$, minimum, maximum

Théorème 4.20. Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une partie finie non vide de $\mathbb{R}$
Alors E possède un <u>plus petit élément</u> / un <u>minimum</u>

$$\min(E) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

et un <u>plus grand élément</u> / un <u>maximum</u>

$$\max(E) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Définition 4.21. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$
On dit que E :

* <u>Admet un minimum</u> $m = \min(E)$ si $m \in E$ et $\forall x \in E, x \geq m$
* Est <u>minoré</u> si on peut trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E, x \geq a$
* <u>Admet un maximum</u> $M = \max(E)$ si $M \in E$ et $\forall x \in E, x \leq M$
* Est <u>majoré</u> si on peut trouver $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E, x \leq b$

Théorème 4.22. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum.

Corollaire 4.23.

* Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ a un minimum.
* En particulier, toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un minimum.

4.7 Récurrences finies

On peut effectuer des récurrences sur un intervalle d'entiers : il y en a de deux types : montant et descendante.

Exemple : Soit $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ bijective telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], f(k) \geq k$. Montrer $f = id_{[\![1,n]\!]}$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons $P(k)$ l'assertion $f(k) = k$
Montrons $\forall k \in [\![1, n]\!], P(k)$ par récurrence descendante forte.

Initialisation : On a $f(n) \in [\![1, n]\!]$ et $f(n) \geq n$, d'où $f(n) = n$, ce que montre $P(n)$

Hérédité : Soit $k \in [\![2, n]\!]$ tel que $P(n)$ et $P(n-1)$ et ... et $P(k)$. Montrons $P(k-1)$
On a $f(k-1) \geq k-1$ par hypothèse et $f(k-1) \in [\![1, n]\!]$
Par injectivité, on a $\forall l \in [\![k, n]\!], f(k-1) \neq f(l)$
càd $\forall l \in [\![k, n]\!], f(k-1) \neq l$
donc $f(k-1) \leq k-1$ (d'après $P(n)$ et ... et $P(k)$)
Cela montre $P(k-1)$ et clôt la récurrence.

4.8 Premier contact avec les ensembles infinis

Définition 4.24. Un ensemble E est dit infini ssi il n'est pas fini.

Proposition 4.25 (Principe des tiroirs, version infinie)**.**
Il n'existe pas d'injection $E \to F$, où E est un ensemble infini et F un ensemble fini.

Théorème 4.26. Soit E un ensemble.
Alors E est infini si et seulement s'il existe une injection $\mathbb{N} \to E$

Théorème 4.27 (Cantor)**.** Soit E un ensemble.
Il n'existe pas de surjection $E \to \mathcal{P}(E)$